

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР  
ГОССТРОЙ УССР  
АКАДЕМИЯ НАУК УССР  
ОБЛАСТНОЕ ПРАВЛЕНИЕ НТО СТРОЙИНДУСТРИИ  
ХАРЬКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

---

**ЭФФЕКТИВНЫЕ  
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ  
РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ  
МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО  
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА**

**ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ  
РЕСПУБЛИКАНСКОЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ  
КОНФЕРЕНЦИИ**

**27–29 сентября 1989 г.  
Часть 2**

# РЕАЛИЗАЦИЯ МКЭ ПРИ ПРОСТРАНСТВЕННОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОМ РАСЧЕТЕ СЛОИСТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Малослойным композитным оболочкам, выполненным из анизотропных (неортоотропных) слоев, свойственен пространственный характер напряженно-деформированного состояния (НДС) [1]. В случае большой деформативности уточненный расчет таких упругих систем необходимо производить в рамках соотношений пространственной геометрически нелинейной теории упругости. Наиболее удобным в реализации здесь оказался метод конечных элементов (МКЭ) в форме метода перемещений. В общем случае несвязанной термоупругости при комбинированном объемном  $P_V$ , поверхностном  $P_S$ , термическом  $T$  нагружении при заданной деформации оболочки  $\epsilon_0$  и заданных на части границы перемещениях  $U_0$ , проблема отыскания НДС сводится к решению нелинейной алгебраической системы уравнений

$$[K_L - K_T + K_\epsilon]U + K_N(U) = Q \quad (I)$$

методом Ньютона, принятом, аналогично [2], в виде

$$[K_L + D(U^{[n]}) - K_T + K_\epsilon]U^{[n+1]} = Q - K_N(U^{[n]}) + D(U^{[n]})U^{[n]},$$

где  $K_L$  - линейная матрица жесткости,  $K_N$ ,  $K_T$  и  $K_\epsilon$  обусловлены учетом нелинейности,  $[D_{ij}(U)] = [\partial K_{N_i} / \partial U_j]$ . Условие существования и единственности решения задачи (I) для уровня нагружения ( $\dots$ ) следует из непрерывной изменяемости якобиана

$J = K_L + D(U) - K_T + K_\epsilon$  [2] и может быть представлено в виде:

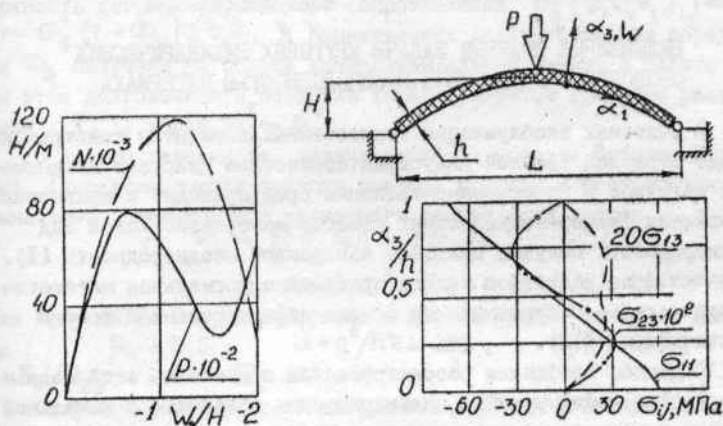
$$\forall 0 \in (P_V, P_S, T, \epsilon_0, U_0) \in (\tilde{P}_V, \tilde{P}_S, \tilde{T}, \tilde{\epsilon}_0, \tilde{U}_0) : \det J(u) > 0.$$

Различная изменяемость поля перемещений в различных координатных направлениях:  $\|\partial u_i / \partial \alpha_k\| \sim \|u_i\|/L$ ,  $\|\partial u_i / \partial \alpha_3\| \sim \|u_i\|/\ell$ ;  $i=1,2,3$ ;  $K=1,2$ ;  $\ell/L \ll 1$ , позволяет улучшить оценку сходимости МКЭ [3]:  $\|u - u_n\|_2 = K \frac{1}{2} \tau \sup \{ \ell \ell^{\frac{1}{2}} \|\partial^{\frac{1}{2}} u(\alpha_k, \alpha_3)\|_\infty : \tau \in \mathbb{R} \}$  где  $\tau = h/\ell = N/L$ . Таким образом, сходимость порядка  $h$  может быть достигнута на вытянутых вдоль координат срединной поверхности конечных элементах (КЭ) с размерами  $N/h = L/\ell \gg 1$ .

Спектральный анализ обусловленности конечноэлементного аналога уравнений равновесия показал, что наиболее устойчивые к

вычислительным погрешностям сетки в случае анизотропного материала слоев имеют место при отношении длин сторон  $K \geq h/\sqrt{E_{KK}/E_{33}}$  (для модулей упругости  $E_{ii}$  конструктивных элементов практически во всех случаях выполняется неравенство  $E_{KK} \gg E_{33}$ ,  $K = 1, 2$ ),

Учет указанных обстоятельств позволяет на основе пространственного подхода решать существенно нелинейные задачи, обеспечивая возможность исследования локальных эффектов в распределении напряжений. Так, на рисунках представлены результаты расчета закритического поведения пологой двухслойной перекрестно армированной цилиндрической панели при  $L/h = 45,8$ ;  $H/h = 1,054$ .



Здесь  $N$  — усилие распора в опоре; распределение напряжений по толщине вблизи опоры соответствует случаю полного выворачивания, когда прогиб под силой  $W_0 = -2H$ . Отметим сложные законы распределения напряжений поперечного сдвига при высоких их абсолютных значениях.

### Л и т е р а т у р а

1. Григолюк Э.И., Носатенко П.Я. Пространственная геометрически нелинейная задача термоупругости слоистых анизотропных оболочек вращения // Механика композит. материалов, 1988. — №4. — С. 684–690.

2. Григолюк Э.И., Носатенко П.Я. О численном обосновании существования и единственности решения геометрически нелинейной задачи теории упругости // Докл. АН СССР, 1986. — 289. — №4. — С. 821 — 824.

3. Григолюк Э.И., Носатенко П.Я. О пространственном подходе к численному решению задач механики тонкостенных конструкций // Журнал вычисл. матем. и матем. физ., 1989. - 23. - №1.-С.151-153.